L14 4.1 The Mean-value theorem (均值定理) 端點的可微性
Thm A Rolle's theorem

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\tan\left[\sin^2\left(3x^2-\frac{1}{x^7}+x\right)\right]}=$$

$$\frac{\sec^2\left[\sin^2\left(3x^2-\frac{1}{x^7}+x\right)\right]\cdot 2\sin\left(3x^2-\frac{1}{x^7}+x\right)\cdot\cos\left(3x^2-\frac{1}{x^7}+x\right)\cdot\left(6x+\frac{7}{x^8}+1\right)}{3\sqrt[3]{\tan\left[\sin^2\left(3x^2-\frac{1}{x^7}+x\right)\right]}}$$

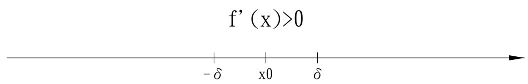
Chapter4 § 4.1 The Mean-value theorem

Def: We say that f is diff. on [a,b], if f is diff. on (a,b),

and lim(h→a^+)[f(x+h)-f(x)]/h exists and lim(h→b^-)[f(x+h)-f(x)]/h exists.

口語：我們說函數在閉區間可微，如果函數在開區間可微，且 a 點割線斜率的右極限存在和 b 點割線斜率的左極限存在。

Q:微分考慮誰的極限？A:割線斜率的極限
By the way $\sqrt{x}$, x>0 考慮在全極限連續，在端點連續則$\sqrt{x}$, x≥0，體材要擴充



ThmA:Let f be diff. at x_0.
f'(x_0)它原始意義該點割線斜率的極限，存在切線斜率的極限，可能>0、=0、<0

① If f'(x_0)>0, 則∃ δ>0, s.t. $\begin{cases} f(x) > f(x0), if\ x \in (x_0, x_0+\delta) \\ f(x) < f(x0), if\ x \in (x_0-\delta, x_0) \end{cases}$.

口語：如果在該點的微分大於零，則會存在有一個數 δ，

以 δ 構造出來的右區間內，它的函數值大於該點函數值，和

以 δ 構造出來的左區間內，它的函數值小於該點函數值。

② If f'(x_0)<0, 則∃ δ>0, s.t. $\begin{cases} f(x) < f(x0), if\ x \in (x_0, x_0+\delta) \\ f(x) > f(x0), if\ x \in (x_0-\delta, x_0) \end{cases}$.

口語：如果在該點的微分小於零，則會存在有一個數 δ，

以 δ 構造出來的右區間內，它的函數值小於該點函數值，和

以 δ 構造出來的左區間內，它的函數值大於該點函數值。

L14 4.1 The Mean-value theorem (均值定理) 端點的可微性
Thm A Rolle's theorem

pf:

① by the way $\lim(x\to c)f(x)=L$, if $\forall\ \varepsilon>0, \delta>0$, s.t $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta$, $|f(x)-L|<\varepsilon$.

$\because\ \lim(h\to 0)[f(x_0+h)-f(x_0)]/h=f'(x_0)>0$

$\therefore\ \varepsilon=f'(x_0)$, $\exists\ \delta>0$, s.t. $\forall$ h in $0<|h|<\delta$, $|[f(x_0+h)-f(x_0)]/h-f'(x_0)|<f'(x_0)$

$\Rightarrow -f'(x_0)<[f(x_0+h)-f(x_0)]/h-f'(x_0)<f'(x_0)$

$\Rightarrow 0<[f(x_0+h)-f(x_0)]/h<2f'(x_0)$

If $h\in(0,\delta)$, then $f(x_0+h)-f(x_0)>0\Rightarrow f(x_0+h)>f(x_0)$.

If $h\in(-\delta,0)$, then $f(x_0+h)-f(x_0)<0\Rightarrow f(x_0+h)<f(x_0)$.

Q:可不可以對不等式取極限？A:不行，除非不等式極限已經存在。

Thm:(Rolle's theorem)

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a function.

If f is cont. on [a,b] and diff. on (a,b) and f(a)=f(b)(=0),

then $\exists\ c\in(a,b)$, s.t. $f'(c)=0$.

口語：Rolle's theorem

如果有一個函數在 ab 閉區間上連續且 ab 開區間上可微，且在端點相

等(取值為 0)，則在 ab 開區間內存在有一個 c，使得該點微分等於 0。

By the way~定理有名稱，用到它一定要寫出來。
By the way~assume 假設、Let 令、Take 取
Q:你們班不是所有人都十八歲什麼意思？A:則有人不是十八歲
~數學的邏輯是生活經驗，數學的內容是離開生活。

L14 4.1 The Mean-value theorem (均值定理) 端點的可微性
Thm A Rolle's theorem

pf:

If $f(x)\equiv 0$ on $[a,b]$. we have this theorem.

assume $f(x)\not\equiv 0$, then $\exists\ x_0\in[a,b]$, s.t. $f(x_0)\neq 0$.say $f(x_0)>(<)0$ 極值定理

Q:要用極大還極小？A:因爲假設 $f(x_0)>0$。

$\because$ f is cont. on $[a,b]$.

$\therefore$ By Extreme value Thm. $\exists\ c\in[a,b]$, s.t. $f(c)=\sup(\inf)(x\in[a,b])f(x)$.

$\Rightarrow f(c)(\geq f(x_0))>(<)0$

$\Rightarrow c\in(a,b)$ c 在 ab 閉區間取的，c 不等於 ab

$\Rightarrow$f is diff. at c. 條件講的

Claim $f'(c)=0$. pf of claim 宣言或宣稱，在證明過程中常用的技巧。

By the way~$c\in(a,b)$在中間過程已經寫了。
Q:怎麼去證這點微分等於 0？
A:第一函數沒有給、第二這點沒有給，沒辦法證，只好利用反證法

assume $f'(c)\neq 0$, say $f'(c)>(<)0$ By thmA，取右邊區間，得矛盾。

By thm A, $\exists\ x_1\in[a,b]$, s.t. $f(x_1)>(<)f(c)$.$\rightarrow\leftarrow$有一點比 f(c)大(小)，得矛盾。

Q:爲什麼會有矛盾？A:因爲假設錯誤

Therefore $f'(c)=0$

By the way~最高分 99、90 幾也有滿多，低分的很多，10 幾分也一票人，兩極化。

cor:取値爲零可以拿掉，從證明過程中可以知道。

改成$\equiv f(a)$或$\not\equiv f(a)$，如果改的出來就是真的懂了。